|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Zentralabitur 2024** | **Mathematik** | **Material für Prüflinge** |
| **Prüfungsteil B – Rechnertyp: CAS** | **Analysis eA** | **Gymnasium Gesamtschule** |

**Name:** \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Klasse:** \_\_\_\_\_\_\_\_

Inhaltsverzeichnis

[Aufgabe 1A (40 BE) 2](#_Toc162342533)

[Aufgabe 1B (40 BE) 8](#_Toc162342534)

# Aufgabe 1A (40 BE)

Gegeben ist die Schar der in \mathds{R} definierten Funktionen  
f\_a mit f\_a(x) =\frac{1}{a^3} x^3 -1/a x^2 +x und a \in \mathds{R^+}.

a) Skizzieren Sie den Graphen von f\_4 in Abbildung 1.  
Geben Sie die Extrempunkte von f\_4 an. **[5 BE]**

#### Hinweis:

Die Grafik ist auf der folgenden Seite.

#### Abbildung 1

y

5

4

3

2

1

-1

-2

x

-2 -1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

b) Ermitteln Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte der Graphen von f\_1 und f\_4.

Weisen Sie nach, dass es nur einen Punkt gibt,  
der auf allen Graphen der Schar liegt. **[5 BE]**

c) Die Gleichung f\_a(x) =0 hat in Abhängigkeit von a die Lösungen \frac{a^2 -\sqrt{a^3 \*(a -4)}}{2} und 0 und \frac{a^2 +\sqrt{a^3 \*(a -4)}}{2}.

Geben Sie die Anzahl der Nullstellen von f\_a in Abhängigkeit von a an und begründen Sie Ihre Angabe anhand der obigen Terme. **[6 BE]**

d) Der Graph jeder Funktion f\_a hat genau einen Wendepunkt.

Bestimmen Sie den Wert von a zu dem Wendepunkt mit der größten y-Koordinate. **[5 BE]**

Für ein Umweltschutzprojekt nehmen zwei Unterwasserdrohnen U1 und U2 in einem See Messungen in unterschiedlichen Tiefen vor. Sie bewegen sich nur in vertikaler Richtung, d. h. senkrecht zur Wasseroberfläche des Sees. Ihre Geschwindigkeiten werden für 0 \le t\le 30 durch die in \mathds{R} definierten Funktionen v bzw. w beschrieben, wobei gilt:

v(t) =-\frac{6}{25}t \*(4t -25) \*e^{-\frac{1}{5} \*t} und  
w(t) =\frac{1}{216}t^3 - 1/6 t^2 +t

Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Minuten. v(t) ist die Geschwindigkeit von U1 in Meter pro Minute und w(t) ist die Geschwindigkeit von U2 in Meter pro Minute. Wenn die Geschwindigkeit positiv ist, steigt die Unterwasserdrohne.

e) Bestimmen Sie die Koordinaten des Tiefpunktes des Graphen von v und interpretieren Sie die Werte im Sachkontext. **[4 BE]**

f) Mit v' wird die erste Ableitungsfunktion von v bezeichnet. Innerhalb eines bestimmten Zeitraums gilt für jeden Zeitpunkt t die folgende Aussage:  
v(t) < 0 und v^'(t) > 0.

Interpretieren Sie dies in Bezug auf die Bewegung von U1 in diesem Zeitraum. **[3 BE]**

g) Im Beobachtungszeitraum beträgt der geringste Abstand von U1 zur Wasseroberfläche des Sees 10 Meter.

Ermitteln Sie den Abstand von U1 zur Wasseroberfläche zu Beobachtungsbeginn. **[6 BE]**

h) U2 ist zu Beobachtungsbeginn 5 Meter tiefer als U1 und steigt langsamer als U1. Der Graph in Abbildung 2 zeigt für die ersten Minuten des Beobachtungszeitraums die zeitliche Entwicklung des vertikalen Abstands der beiden Unterwasserdrohnen zueinander. Im dargestellten Bereich hat der Graph nur einen Hochpunkt H(t\_H|y\_H). Erläutern Sie, wie man t\_h anhand der Graphen von v und w ermitteln kann, und geben Sie einen Term zur Berechnung von y\_H an. **[6 BE]**

#### Abbildung 2

y

t

**H**

# Aufgabe 1B (40 BE)

Die zeitliche Entwicklung der Blutalkoholkonzentration (BAK) kann für eine bestimmte Person nach dem Verzehr von zwei Gläsern Wein durch die auf \mathds{R} definierte Funktion f mit  
f(t) =1,081 \*(1 -e^{-t} -0,15 \*t beschrieben werden. Dabei gibt t die Zeit nach dem Trinken in Stunden an und f(t) die BAK in Gramm pro Kilogramm (\frac{g}{kg}). Es soll vereinfacht davon ausgegangen werden, dass die gesamte Menge Wein auf einmal konsumiert wird.

a) Geben Sie die Nullstellen von f an.

Begründen Sie, dass das Intervall [0;7,2]  
eine angemessene Einschränkung des Definitionsbereichs der Funktion f für den Sachzusammenhang ist. **[3 BE]**

b) Berechnen Sie die maximale BAK der  
betrachteten Person.

Bei einer BAK von 0,5 \frac{g}{kg} oder mehr darf die Person in Deutschland kein Auto mehr fahren.

Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem die Person nicht Auto fahren darf. **[6 BE]**

Mit Hilfe einer linearen Funktion können Näherungswerte für die BAK berechnet werden. Für jede Person ergibt sich je nach individuellen Eigenschaften und konsumierter Alkoholmenge eine andere lineare Funktion. Der y-Achsenabschnitt des Graphen der linearen Funktion wird als theoretische maximale BAK bezeichnet.

Für die betrachtete Person wird die auf definierte Funktion h mit h(t) =1,081 -0,15 \*t verwendet. Dabei beschreibt t die Zeit nach dem Trinken in Stunden und h(t) Näherungswerte der BAK in \frac{g}{kg}.

c) Zeigen Sie, dass die theoretische maximale BAK für die betrachtete Person 1,081 \frac{g}{kg} beträgt.

Zur Bestimmung der linearen Funktion für eine zweite Person werden zwei Messungen durchgeführt: 4 Stunden nach dem Verzehr beträgt die BAK 0,48 \frac{g}{kg} und weitere 30 Minuten später 0,39 \frac{g}{kg}.

Berechnen Sie damit die theoretische maximale BAK der zweiten Person. **[5 BE]**

d) Begründen Sie mit Hilfe des Terms von f, dass die Werte der BAK der ersten betrachteten Person zu jedem Zeitpunkt kleiner sind als ihre theoretische maximale BAK. **[3 BE]**

e) Zeigen Sie, dass *f* eine Lösung der Differenzialgleichung  
f^'(t) =k \*(G -(f(t) + m\* t)) -m   
mit  
k =1, G =1,081 und m =0,15 ist.  
**[4 BE]**

f) Für verschiedene Personen ergeben sich individuelle zeitliche Verläufe der BAK.

Für 0 < m < 1,081 werden die auf \mathds{R} definierten Funktionen f\_m mit f\_m(t) =1,081 \*(1 -e^{-t} -m \*t betrachtet. t beschreibt die Zeit nach dem Trinken in Stunden und f\_m(t) die BAK in \frac{g}{kg}.

Bestimmen Sie alle Werte von m so, dass die BAK zu keinem Zeitpunkt den Wert von 0,5 \frac{g}{kg} überschreitet. **[7 BE]**

Unabhängig vom Sachkontext wird die auf \mathds{R} definierte Funktionenschar p\_a für a >0 betrachtet mit  
p\_a(x) =2 \*(1 -e^{-a \*x}) -1/5 \*x.

g) Zeigen Sie, dass jede Funktion der Schar ein lokales Maximum an der Stelle x =\frac{ln(10 \*a)}{a} hat.

Begründen Sie, dass die x-Koordinaten der Hochpunkte für a >\frac{e}{10} mit wachsenden Werten von a kleiner werden. **[7 BE]**

h) Der Inhalt der Fläche zwischen den Graphen von p\_{0,5} und p\_3 auf dem Intervall [0;1] soll an der Stelle u durch eine Parallele zur y-Achse halbiert werden.

Bestimmen Sie u. **[5 BE]**

#### Gesamtergebnis

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Aufgabe** | **Mögliche Punkte** | **Erreichte Punkte** |
| **1A** | **40 BE** |  |
| **a)** | **5 BE** |  |
| **b)** | **5 BE** |  |
| **c)** | **6 BE** |  |
| **d)** | **5 BE** |  |
| **e)** | **4 BE** |  |
| **f)** | **3 BE** |  |
| **g)** | **6 BE** |  |
| **h)** | **6 BE** |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **1B** | **40 BE** |  |
| **a)** | **3 BE** |  |
| **b)** | **6 BE** |  |
| **c)** | **5 BE** |  |
| **d)** | **3 BE** |  |
| **e)** | **4 BE** |  |
| **f)** | **7 BE** |  |
| **g)** | **7 BE** |  |
| **h)** | **5 BE** |  |